Πραγματική Ανάλυση

16-10-17

$\mathcal{L}_1 := \{ x \in P(\mathbb{R}) \mid x = [a,b]$ ή $x = [a,b)$ ή $x = (a,b]$ ή $x = (a,b)$ ή $x = \{a\}$, για $a, b \in \mathbb{R}$ ή $x = \emptyset \}$

$X \to P(X)$

καλά ορισμένη η συνάρτηση

ορίζουμε το μήκος $\mu : \mathcal{L}_1 \to \mathbb{R}^+$

$\mu([a,b]) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu((a,b)) = b - a$, αν $a < b$ με $\mu(\{a\}) = \mu(\emptyset) = 0$

$x, y \in \mathbb{R} \to [x, y)$ αν

εμείς θα λέμε ότι το ξέρουμε αν έχει τις ιδιότητες: να προσθέτουμε να πολλαπλασιάζουμε και την ισότητα. Θα λέμε ότι το ξέρουμε, γιατί αν θέλουμε να το ορίσουμε αυστηρώς θα πρέπει να χρησιμοποιούμε αξιώματα της θεωρίας των συνόλων & φορές για x και y.

$[a,b] \times [\gamma, \delta]$ $a < b$, $\gamma < \delta$ Θα μας ενδιαφέρει αν γνωρίζουμε ότι σχηματίζουν ορθογώνια, όχι τον αυστηρό ορισμό του

σχόλιο

$\mathcal{L}_2 := \{ X \in \mathbb{R}^2 \mid$ υπάρχουν $I_1, I_2 \in \mathcal{L}_1 : X = I_1 \times I_2 \}$

απλά τα φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}_2$

$\mathbb{R} = \mathcal{L}_1$

ορίζουμε τη συνάρτηση $V: \mathcal{L}_2 \to \mathbb{R}^+$

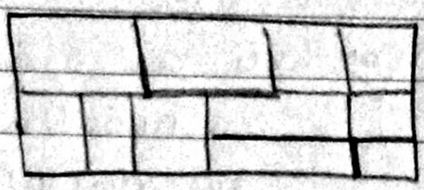
$$V(I_1 \times I_2) = \mu(I_1)\mu(I_2), \quad \forall I_1, I_2 \in \mathcal{L}_1.$$

$\underbrace{[a,b]\times[\gamma,\delta]}_{A}$ $a<b$, $\gamma<\delta$

$V(A) = \mu([a,b])\,\mu([\gamma,\delta]) = (b-a)(\delta-\gamma)$

(είναι το εμβαδόν ορθογωνίου)

Προσοχή:



Αν χωρίσουμε ένα πολυγωνικό χωρίο σε μικρότερα πολυγωνικά χωρία ισχύει ότι:
Το εμβαδό του μεγάλου πολυγωνικού χωρίου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των μικρότερων πολυγωνικών χωρίων. (Το συγκεκριμένο είναι αξίωμα, στο βιβλ των μαθημ Β' Λυκείου)

ορισμός

Διαμερίσεις

Έστω διάστημα $A=[a_0,b_0]$ με $a_0<b_0$.
Ένα σύνολο $\delta=\{a_0,a_1,\dots,a_n\}\subseteq[a_0,b_0]$ με $a_0,b_0\in\delta$, ονομάζεται διαμέριση του $[a_0,b_0]$, $n\geq 2$
Το απλούστερο $\delta=\{a_0,b_0\}$
Συνήθως θα διατάσσουμε τα $a_1>a_2>a_n$ κατά τη φυσική τους διάταξη. Δηλαδή, θα εννοούμε σιωπηρά ότι $a_1<a_2<\dots<a_n$, προφανώς $a_1=a_0$ και $a_n=b_0$.

Από την διαδικασία της διαμέρισης σχηματίζονται κάποια μικρότερα ορθογώνια, που αν τα βάλουμε σ' ένα σύνολο δ που θα ονομάσουμε διαμέριση.

Έστω $A = [a_0, b_0] \times [\gamma_0, \delta_0]$ $a_0 < b_0$ και $\gamma_0 < \delta_0$

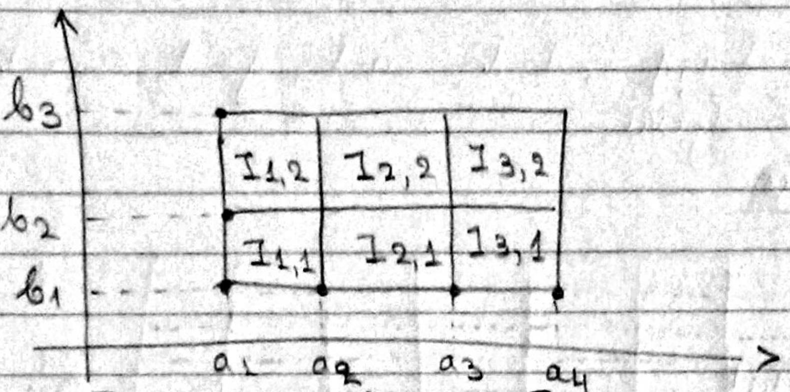
Έστω $\delta_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ μια διαμέριση του $[a_0, b_0]$

και $\delta_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ >> >> $[\gamma_0, \delta_0]$

για $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq 2$

$I_{i,j} = [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]^{(1)}$ για όλα τα i, j

όπου $i = 1, 2, \ldots, n-1$ και $j = 1, 2, \ldots m-1$.



$$\left.\begin{array}{ll} I_{1,1} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] & \text{για } i=1 \ \& \ j=1 \\ I_{1,2} = [a_1, a_2] \times [b_2, b_3] & \text{για } i=1, \ j=2 \\ I_{2,1} = [a_2, a_3] \times [b_2, b_3] & \text{για } i=2, \ j=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ συμφωνεί ο τύπος (1).

<u>Ορισμός</u>: Έστω $A = [a_0, b_0] \times [\gamma_0, \delta_0]$ κλειστό & φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}^2$ με $a_0 < b_0$ και $\gamma_0 < \delta_0$ με $a_0, b_0, \gamma_0, \delta_0 \in \mathbb{R}$. Έστω $\delta_1 = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ να είναι διαμέριση του $[a_0, b_0]$ και $\delta_2 = \{b_1, b_2, \ldots b_m\}$ διαμέριση του $[\gamma_0, \delta_0]$ για $n, m \in \mathbb{N}$ με $n, m \geq 2$. Ορίζουμε τα διαστήματα $I_{i,j} = [a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$ για κάθε i, j όπου $i = 1, 2, \ldots n-1$ και $j = 1, 2, \ldots m-1$. Ονομάζουμε <u>βασική</u>

διαμέριση του A ως προς τις δ_1 και δ_2, τό σύνολο

$$\Delta(A,\delta_1,\delta_2) = \{ I_{i,j} \mid i=1,\dots n-1,\ j=1,\dots m-1\}$$

<u>πρόταση</u>. Έστω $I=[a_0,b_0]\times[\gamma_0,\delta_0]$, όπου $a_0, b_0,\gamma_0,\delta_0\in\mathbb{R}$ με $a_0<b_0$, $\gamma_0<\delta_0$, $\delta_1=\{a_1,\dots a_n\}$ διαμέριση του $[a_0,b_0]$ και $\delta_2=\{b_1,\dots b_m\}$ διαμέριση του $[\gamma_0,\delta_0]$ για $n,m\in\mathbb{N}$, $n,m\geq 2$. Τότε ισχύουν τα εξής:

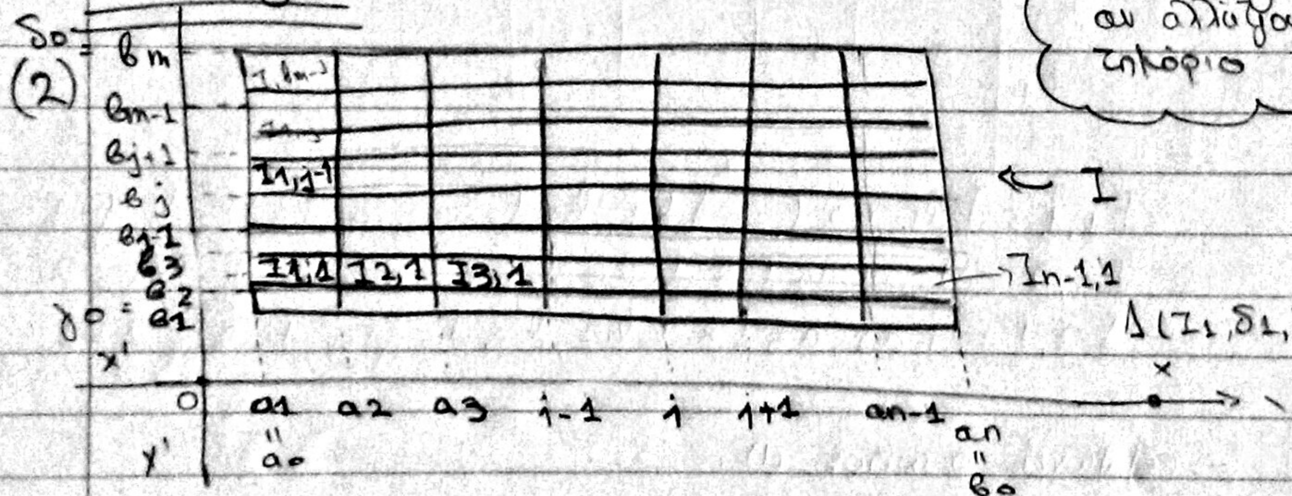
(1) $I = \bigcup_{A\in\Delta(I,\delta_1,\delta_2)} A$ (άσκηση η απόδειξη)

(2) $V(I) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n-1\\ 1\leq n\leq m-1}} V(I_{i,j})$

(3) Τα $I_{i,j}$, $i=1,\dots n-1$, $j=1,\dots m-1$ είναι σχεδόν ανά δύο ξένα.

<u>Απόδειξη</u>

(2)



$$V(I) = \sum_{\substack{1\leq i\leq n-1\\1\leq j\leq m-1}} V(I_{i,j}) = \sum_{\substack{1\leq j\leq m-1\\1\leq i\leq n-1}} V(I_{i,j}) = \sum_{(i,j)\in T_{n-1,m-1}} V(I_{i,j})$$

$$= \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1} V(I_{i,j})$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} V(I_{i,j})$$

όπου $T_{n-1,m-1} = T_{n-1}\times T_{m-1}$ και $T_k=\{1,2,\dots k\}$ $\forall k\in\mathbb{N}$.

Από το σχήμα

$V(I_{1,1}) + V(I_{2,1}) + \dots + V(I_{n-1,1}) =$
$= (a_2-a_1)(b_2-b_1) + (a_3-a_2)(b_2-b_1) + \dots + (a_n-a_{n-1})(b_2-b_1)$
από τον ορισμό της συνάρτησης V
$= (b_2-b_1)((\cancel{a_2}-a_1)+(\cancel{a_3}-\cancel{a_2})+\dots+(a_n-\cancel{a_{n-1}})) =$
$= (b_2-b_1)(a_n-a_1)$

$V(I_{1,j}) + V(I_{2,j}) + \dots + V(I_{n-1,j}) =$

$= (a_2-a_1)(b_{j+1}-b_j) + (a_3-a_2)(b_{j+1}-b_j) + \dots + (a_n-a_{n-1})(b_{j+1}, b_j)$
$= (b_{j+1}, b_j)((\cancel{a_2}-a_1)+(\cancel{a_3}-\cancel{a_2})+\dots+(a_n-\cancel{a_{n-1}}))$
$= (b_{j+1}, b_j)(a_n-a_1)$

$$\sum_{i=1}^{n-1} V(i,j) = (a_n-a_1)(b_{j+1}-b_j) \ (1) \ \forall j=1,2,\dots,m-1$$

Από την (1) έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{m-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} V(I_{i,j})\right) = \sum_{j=1}^{m-1}\left((a_n-a_1)(b_{j+1}-b_j)\right) =$$

$$= (a_n-a_1)\sum_{j=1}^{m-1}(b_{j+1}-b_j) = (a_n-a_1)(b_m-b_1) =$$

$$\underset{\text{ορ}}{=} V(I)$$ □

$J=[a,b]\times[\gamma,\delta]$ (x,y) εσωτ. του J $a<x<b$
$\gamma<y<\delta$

$(a_1,a_2)\cup(a_2,a_3)\cup\dots\cup(a_{n-1},a_n)$ και επειδή είναι ξένα μεταξύ τους, το x μπορεί να ανήκει μόνο ακριβώς σε ένα από τα διαστήματα αυτά.

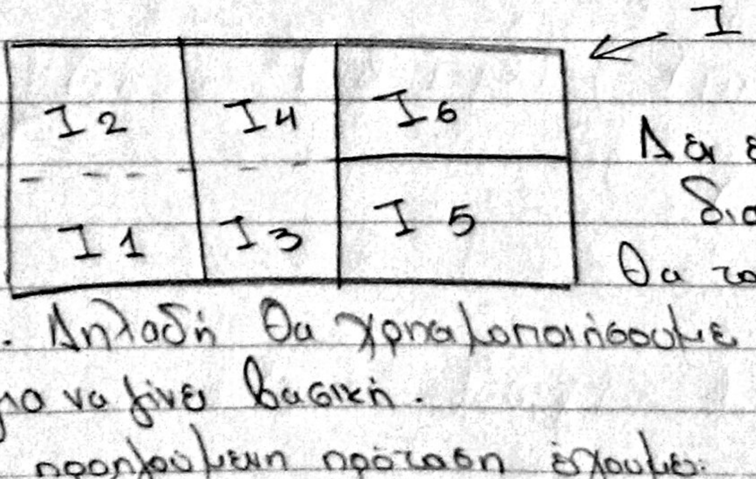
$(b_1,b_2)\cup(b_2,b_3)\cup\dots\cup(b_{m-1},b_m)$ και εφόσον είναι ξένα μεταξύ τους, θα ανήκει το y μόνο σ' ένα από όλα αυτά τα διαστήματα.

(3) $A=(x_0,y_0)$ εσωτερικό σημείο του I_{i_0,j_0} για κάποιο i_0, j_0. Τότε εξ' ορισμού του εσωτερικού σημείου έχουμε ότι $x_0\in(a_{i_0},a_{i_0+1})$ και $y_0\in(b_{j_0},b_{j_0+1})$

Έστω $\Delta_1=\bigcup_{i=1}^{n-1}(a_i,a_{i+1})$. Αφού τα (a_i,a_{i+1}) $i=1,2,\dots,n-1$ είναι ξένα ανά 2 το x_0 ανήκει μόνο σ' ένα από αυτά.

$\Delta_2=\bigcup_{j=1}^{m-1}(b_j,b_{j+1})$. Παρόμοια το y_0 ανήκει ακριβώς σ' ένα από τα (b_j,b_{j+1}), $j=1,2,\dots,m-1$ γιατί αν υπάρχει και άλλο το $I_{i,j}$ ώστε $(x_0,y_0)\in I_{i,j}$ τότε $x\in(a_i,a_{i+1})$ και $y\in(b_j,b_{j+1})$.
Αφού $I_{i_0,j_0}\neq I_{i_1,j_1}$ ή $i_0\neq i_1$ ή $j_0\neq j_1$
Τότε όμως $(a_{i_0},a_{i_0+1})\cap(a_{i_1},a_{i_1+1})=\emptyset$
ή
$(b_{j_0},b_{j_0+1})\cap(b_{j_1},b_{j_1+1})=\emptyset$ ◻

SOS

1) 

Δεν είναι βασική διαμέριση. Θα το σπάσουμε σε 6 κομμάτια. Δηλαδή θα χρησιμοποιήσουμε μια βοηθητική γραμμή, για να γίνει βασική.
Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε:

$$V(I)=\sum_{i=1}^{6}V(I_i) \quad (1)$$

$I_{1,2} = I_1 \cup I_2$

$V(I_{1,2}) = V(I_1) + V(I_2)$ (2)

$I_{3,4} = I_3 \cup I_4$

$V(I_{3,4}) = V(I_3) + V(I_4)$ (3)

Θνδο $V(I) = V(I_{1,2}) + V(I_{3,4}) + V(I_5) + V(I_6)$

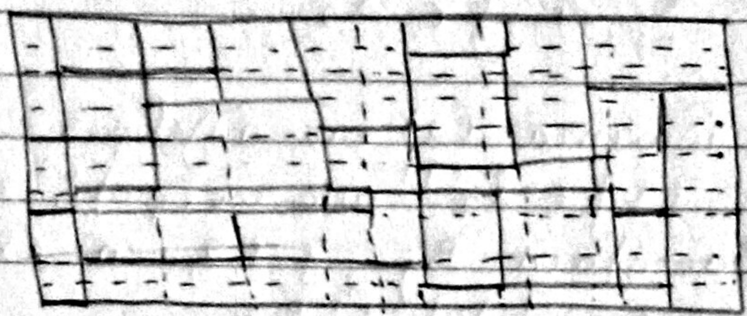
Παίρνω το δεύτερο μέλος και θα καταλήξω στο πρώτο.

$V(I_{1,2}) + V(I_{3,4}) + V(I_5) + V(I_6) \underset{\text{και } (3)}{\overset{\text{από } (2)}{=}}$

$= \big(V(I_1) + V(I_2)\big) + \big(V(I_3) + V(I_4)\big) + V(I_5) + V(I_6)$

$\overset{(1)}{=} V(I)$

2)



Το χωρίσαμε σε μικρότερα ορθογώνια. Τώρα είναι βασική η διαμέριση

$\Delta(I, \delta_1, \delta_2)$

Παρατήρηση: $V : \mathcal{L}_2 \to \mathbb{R}^+$. Η συνάρτηση V έχει μία πεπερασμένα προσθετική ιδιότητα.

Δηλαδή

Αν I, I_i, $i=1,2, \dots n$ είναι φραγμένα κλειστά διαστήματα του $\mathbb{R}^2$, σχεδόν ξένα ανά δύο και $I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$, τότε $V(I) = \sum_{i=1}^{n} V(I_i)$

(χωρίς απόδειξη)

Πρόταση: Έστω I, I_i $i=1,2,\dots n$ είναι στοιχεία του $\mathcal{L}_2$, τω τα I_i, $i=1,2,\dots,n$ να είναι σχεδόν ξένα ανά δύο και

$\bigcup_{i=1}^{n} I_i \subseteq I$ τότε, $\sum_{i=1}^{n} V(I_i) \le V(I)$

Απόδειξη

Πρώτα για 4 κλειστά διαστήματα.

Θυμίζουμε την $\mathcal{A}_2^{(I)} = \{X \subseteq I \mid X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, n \in \mathbb{N}$ όπου

τα A_i είναι σχεδόν ξένα ανά δύο διαστήματα του $\mathcal{L}_\Sigma\}$.
Αυτό το $\mathcal{A}_2^{(I)}$ είναι μια άλγεβρα στο I.
Γράφουμε, $J = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Αφού, τα I_i, $i=1,2,\dots n$, $n \in \mathcal{A}_2^{(I)}$
άρα και η

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i = J \in \mathcal{A}_2^{(I)}.$$

Από, την ιδιότητα (i) της άλγεβρας $\mathcal{A}_2^{(I)}$ το $I \setminus J \in \mathcal{A}_2^{(I)}$
Άρα, αφού $I \setminus J \in \mathcal{A}_2^{(I)}$ από τον ορισμό της άλγεβρας
υπάρχουν διαστήματα B_j, $j=1,2,\dots n$ σχεδόν ξένα ανά
2 έτσι ώστε $I \setminus J = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$.

$$I = J \cup (I \setminus J) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} I_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) \quad \circledast$$

$$\left.\begin{array}{l} I_i \subseteq J \\ B_j \subseteq I \setminus J \end{array}\right\} \Rightarrow I_i \cap B_j \subseteq J \cap (I \setminus J) = \emptyset$$

$$\Rightarrow I_i \cap B_j = \emptyset$$

Άρα, το I γράφεται σαν ένωση διαστημάτων ξένων
ανά δύο.

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \quad \text{από τοπολογία}$$

$$\circledast \quad \overline{\underset{\substack{\text{"}\\ \nu(I)}}{}} = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{I_i}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \overline{B_j}\right)$$

Άρα $\nu(\overline{I}) = \sum_{i=1}^{n} \nu(\overline{I_i}) + \sum_{j=1}^{m} \nu(\overline{B_j}) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \nu(I) + \sum_{j=1}^{m} \nu(B_j) \geq \sum_{i=1}^{n} \nu(I_i)$$

$\square$